

Quelques Propriétés des Représentations Induites Principales Illustrées par les Groupes Ponctuels Cristallographiques*

PAR KORCHI MASMOUDI ET YVES BILLIET

Département de Physique, ENIS, BP W, 3038 Sfax, Tunisie

(Reçu le 6 avril 1988, accepté le 13 juillet 1988)

Abstract

A point group representation spanned by a set of equivalent positions is a peculiar principal induced representation (PIR) associated with the stabilizer subgroup of the generating position. The characters, the irreducible components and the kernels of the PIR are determined by means of classical methods. The PIR properties are specially studied in connection with subgroup relations. There is a mapping from the ordered set of conjugate subgroups to the ordered set of non-equivalent PIR. The PIR direct products may always be split into a sum of PIR; in special cases the product reduces to one PIR. The intersection of PIR is not always a PIR; this depends on relative properties of their associated subgroups. When the point group is commutative the set of non-equivalent PIR may be erected into a modular lattice (in the mathematical sense). It is isomorphic to the modular lattice of subgroups. The study is illustrated by numerous examples built on point groups $42m$, 23 and $4/m$.

I. Introduction

Les groupes ponctuels cristallographiques constituent des exemples de choix en théorie des groupes. Leurs ordres restent suffisamment petits pour qu'on puisse les manipuler aisément; néanmoins la complexité de certains d'entre eux est telle qu'ils se prêtent à l'illustration de nombreuses propriétés. C'est le cas des représentations induites principales et plus particulièrement des représentations de permutation des familles de points équivalents dont Bertaut (1968, 1981) a signalé un certain nombre d'applications cristallographiques.

En ce qui concerne les concepts bien connus intervenant dans cette étude (représentation induite principale, espace vectoriel d'un groupe, ensemble ordonné et treillis de sous-groupes) nous faisons référence aux ouvrages classiques (e.g. Lomont, 1959; Kurosh, 1960, 1965; Murnagham, 1963; Dubreil, 1972; Kirillov, 1976); quant aux concepts moins connus intervenant dans les §§ III et IV principalement,

nous ne nous étendons pas sur le détail des démonstrations mathématiques.†

II. Représentations sous-tendues par des points équivalents et représentations induites principales

Soit G un groupe ponctuel cristallographique. Considérons un point q_i de l'espace cristallographique et soit H_i le stabilisateur de q_i (Berger, 1977), c'est-à-dire, le sous-groupe de tous les éléments de G qui transforment q_i en lui-même. Voici la partition à gauche P_i de G relative à H_i :‡

$$G = A_{i1}H_i + A_{i2}H_i + A_{i3}H_i + \dots + A_{ip_i}H_i,$$

$$P_i = \{A_{i1}H_i, A_{i2}H_i, A_{i3}H_i, \dots, A_{ip_i}H_i\},$$

avec $A_{i1} \in H_i$, $A_{i2} \notin A_{i1}H_i$, $A_{i3} \notin A_{i1}H_i$, $A_{i3} \notin A_{i2}H_i, \dots$. Le nombre p_i des complexes à gauche $A_{ij}H_i$ ($1 \leq j \leq p_i$) est bien entendu l'indice de H_i dans G ; $p_i = |G|/|H_i|$, $|G|$ et $|H_i|$ désignant les ordres de G et H_i . Tous les éléments de $A_{i1}H_i$ transforment q_i en lui-même ($A_{i1}H_i = H_i$); tous les éléments de $A_{i2}H_i$ transforment q_i en un même second point q_{i2} ; tous les éléments de $A_{i3}H_i$ transforment q_i en un même troisième point q_{i3} etc. L'ensemble $(q_{ij}) = \{q_i, q_{i2}, q_{i3}, \dots, q_{ip_i}\}$ est dit orbite de q_i (Berger, 1977) ou plus communément famille des points équivalents à q_i . Les stabilisateurs H_{ij} des points q_{ij} sont des sous-groupes conjugués de H_i dans G : $H_{i2} = A_{i2}H_iA_{i2}^{-1}$, $H_{i3} = A_{i3}H_iA_{i3}^{-1}$, \dots , $H_{ip_i} = A_{ip_i}H_iA_{ip_i}^{-1}$. L'action de tout élément g de G sur les points équivalents q_{ij} est une permutation de ceux-ci. La famille (q_{ij}) sous-tend donc une représentation de permutation $R(q_{ij})$ de G de dimension p_i . Puisqu'il existe une bijection, régulière vis-à-vis de l'action de g , entre les points q_{ij} et les complexes $A_{ij}H_i$ de P_i , $R(q_{ij})$ n'est autre que la représentation induite principale $R(H_i)$ de G associée au sous-groupe H_i , c'est-à-dire, admettant comme base la partition P_i .

† Plusieurs concepts intervenant dans les §§ III et IV ne semblent pas avoir fait l'objet de publications; nous tenons à la disposition du lecteur les démonstrations complètes les concernant.

‡ Les opérations de symétrie sont composées de la droite vers la gauche: XY signifie X précédé de Y . Nous avons préféré utiliser le mot 'complexe' plutôt que le mot 'classe' qui admet de multiples sens en cristallographie.

§ Encore appelée 'représentation quasi-régulière'.

* An English translation 'not refereed' may be obtained from the authors upon request.

L'expression 'représentation induite principale' sera désignée par l'abréviation 'RIP' dans la suite du mémoire. La dimension de $R(H_i)$ divise donc $|G|$; le caractère de cette RIP est bien évidemment donné par les traces de ses matrices; la trace de la matrice $R(H_i, g)$ représentant l'élément g de G a pour valeur:*

$$\chi[R(H_i, g)] = p_i k_i(g) / k_i \geq 0$$

où k_i désigne le nombre de sous-groupes conjugués de H_i dans G et $k_i(g)$ le nombre de ceux d'entre eux qui contiennent g . Les matrices de $R(H_i)$ étant des matrices de permutation, leurs traces sont nécessairement des entiers positifs ou nuls; la trace des matrices de g et de ses conjugués n'est jamais nulle si g appartient à H_i ou à un sous-groupe conjugué de H_i ; la trace de g et de ses conjugués est toujours nulle si ni g ni l'un de ses conjugués n'appartient à H_i ; si H_i est invariant, tous les éléments de H_i ont pour trace p_i , les traces des autres éléments de G sont nulles. Enfin, quels que soient G et H_i , la somme des traces de $R(H_i)$ est égale à l'ordre de G :

$$\sum_{g \in G} \chi[R(H_i, g)] = |G|.$$

$R(H_i)$ peut être réduite:

$$R(H_i) = \sum_{\alpha} m_i(R_{\alpha}) R_{\alpha};$$

le poids $m_i(R_{\alpha})$ de chaque représentation irréductible R_{α} de G est égal à:

$$m_i(R_{\alpha}) = (1/|H_i|) \sum_{h_i \in H_i} \chi(R_{\alpha}, h_i).$$

Si une représentation irréductible *complexe* de G figure dans la réduction de $R(H_i)$, alors la représentation irréductible *complexe conjuguée* y figure également. Par ailleurs, il y a autant de RIP de dimension 2 qu'il y a de représentations irréductibles monodimensionnelles *alternantes* de G , c'est-à-dire, de sous-groupes d'indice 2 (cf. Bertaut, 1968). Considérons maintenant le cas particulier où G est le produit direct d'un sous-groupe G_1 et d'un sous-groupe $G_2 = \{1, X\}$ d'ordre 2; si $X \in H_i$, alors les représentations irréductibles qui composent $R(H_i)$ sont toutes symétriques (paires) par rapport à l'élément X ; si $X \notin H_i$, alors la somme des dimensions des représentations irréductibles symétriques par rapport à X est égale à la somme des dimensions des représentations irréductibles antisymétriques (impaires) par rapport à X , composant $R(H_i)$. Dans tous les cas, le noyau N_i de $R(H_i)$ est le plus grand

* La trace est aussi donnée par

$$\chi[R(H_i, g)] = p_i |C_g \cap H_i| / |C_g|$$

où C_g désigne la classe des conjugués de g dans G , $|C_g|$ leur nombre et $|C_g \cap H_i|$ le nombre de ceux d'entre eux contenus dans H_i .

Tableau 1. Familles de points équivalents du groupe ponctuel $\bar{4}2m$

Les notations sont directement dérivées de celles du groupe d'espace $P\bar{4}2m$ - N° 111 (*International Tables for Crystallography*, 1987): les coordonnées sont relatives au repère conventionnel quadratique.

8	o	1	$x, y, z; \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}; y, \bar{x}, \bar{z}; \bar{y}, x, \bar{z}; \bar{x}, y, \bar{z}; x, \bar{y}, \bar{z}; \bar{y}, \bar{x}, z; y, x, z.$
4	n	$..m$	$x, x, z; \bar{x}, \bar{x}, z; x, \bar{x}, \bar{z}; \bar{x}, x, \bar{z}.$
4	i	$.2.$	$x, 0, 0; \bar{x}, 0, 0; 0, \bar{x}, 0; 0, x, 0.$
2	g	$2..mm$	$0, 0, z; 0, 0, \bar{z}.$
1	a	$\bar{4}2m$	$0, 0, 0.$

Tableau 2. Caractères des représentations irréductibles du groupe ponctuel $\bar{4}2m$

R_{α}	1	$2.. \bar{4}$	2_c	$2.. 2_a$	$2.. m_{a+b}$
A_1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	-1	-1
B_1	1	-1	1	1	-1
B_2	1	-1	1	-1	1
E	2	0	-2	0	0

sous-groupe invariant de G contenu dans H_i , c'est l'ensemble des éléments n_i tels que $\chi[R(H_i, n_i)] = p_i$; si N_i se réduit à l'identité, $R(H_i)$ est fidèle.

Exemple

Considérons le groupe ponctuel $G = \bar{4}2m$ (Tableaux 1 et 2) et soit $q_i = (x, \bar{x}, \bar{z})$ avec $x, z \in \mathbb{R}, x \neq 0$. Il vient alors: $|G| = 8, H_i = \{1, m_{a+b}\} = m_{a+b}, |H_i| = 2, p_i = 4, A_{i1} = 1, A_{i2} = \bar{4}, A_{i3} = 2_c, A_{i4} = \bar{4}^3, A_{i1}H_i = \{1, m_{a+b}\}_2, A_{i2}H_i = \{\bar{4}, 2_b\}, A_{i3}H_i = \{2_c, m_{-a+b}\}, A_{i4}H_i = \{\bar{4}^3, 2_a\}, (q_{ij}) = \{(x, \bar{x}, \bar{z}), (\bar{x}, \bar{x}, z), (\bar{x}, x, \bar{z}), (x, x, z)\} =$ famille n (cf. Tableau 1), $H_{i2} = H_{i4} = m_{-a+b}, H_{i3} = m_{a+b}$. Voici les matrices de $R(m_{a+b})$:

$R(H_i, 1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$	$R(H_i, \bar{4}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix};$
$R(H_i, 2_c) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix};$	$R(H_i, \bar{4}^3) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix};$
$R(H_i, 2_a) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix};$	$R(H_i, 2_b) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix};$
$R(H_i, m_{a+b}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix};$	$R(H_i, m_{-a+b}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$

Tableau 3. *Caractères, réductions et noyaux des RIP* $R(H_i)$ *de* $G = \bar{4}2m$

Familles de points équivalents sous-tendant ces RIP. 2_c est le sous-groupe commutateur.

(q_{ij})	$R(H_i)$	1	$2 \cdot \bar{4}$	2_c	$2 \cdot 2_a$	$2 \cdot m_{a+b}$	N_i
a	$R(\bar{4}2m) = A_1$	1	1	1	1	1	$\bar{4}2m$
	$R(222) = A_1 + B_1$	2	0	2	2	0	222
g	$R(mm2) = A_1 + B_2$	2	0	2	0	2	$mm2$
	$R(\bar{4}) = A_1 + A_2$	2	2	2	0	0	$\bar{4}$
i	$R(2_a) = R(2_b) = A_1 + B_1 + E$	4	0	0	2	0	1
n	$R(m_{a+b}) = R(m_{-a+b}) = A_1 + B_2 + E$	4	0	0	0	2	1
	$R(2_c) = A_1 + A_2 + B_1 + B_2$	4	0	4	0	0	2_c
o	$R(1) = A_1 + A_2 + B_1 + B_2 + 2E$	8	0	0	0	0	1

Tableau 4. *Familles de points équivalents du groupe ponctuel* 23

Les notations sont directement dérivées de celles du groupe d'espace $P23 - N^\circ 195$ (*International Tables for Crystallography*, 1987): les coordonnées sont relatives au repère conventionnel cubique.

12	j	1	$x, y, z; \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}; \bar{x}, y, \bar{z}; x, \bar{y}, \bar{z};$ $z, x, y; z, \bar{x}, \bar{y}; \bar{z}, \bar{x}, y; \bar{z}, x, \bar{y};$ $y, z, x; \bar{y}, z, \bar{x}; y, \bar{z}, \bar{x}; \bar{y}, \bar{z}, x.$
6	f	$2 \dots$	$x, 0, 0; \bar{x}, 0, 0; 0, x, 0;$ $0, \bar{x}, 0; 0, 0, x; 0, 0, \bar{x}.$
4	e	$3 \dots$	$x, x, x; \bar{x}, \bar{x}, x; \bar{x}, x, \bar{x}; x, \bar{x}, \bar{x}.$
1	a	23	$0, 0, 0.$

Tableau 5. *Caractères des représentations irréductibles du groupe ponctuel* 23 [$j = \exp(2i\pi/3)$]

R_α	1	4.3	$4 \cdot 3^2$	3.2
A	1	1	1	1
E	$\begin{cases} 1 \\ 1 \end{cases}$	$\begin{cases} j \\ j^* \end{cases}$	$\begin{cases} j^* \\ j \end{cases}$	1
T	3	0	0	-1

Tableau 6. *Caractères, réductions et noyaux des RIP* $R(H_i)$ *de* $G = 23$

Familles de points équivalents sous-tendant ces RIP. 222 est le sous-groupe commutateur.

(q_{ij})	$R(H_i)$	1	4.3	$4 \cdot 3^2$	3.2	N_i
a	$R(23) = A$	1	1	1	1	23
	$R(222) = A + E$	3	0	0	3	222
e	$\begin{cases} R(3_{a+b+c}) = R(3_{-a-b+c}) \\ = R(3_{-a+b-c}) \\ = R(3_{a-b-c}) \\ = A + T \end{cases}$	4	1	1	0	1
f	$\begin{cases} R(2_a) = R(2_b) = R(2_c) \\ = A + E + T \end{cases}$	6	0	0	2	1
g	$R(1) = A + E + 3T$	12	0	0	0	1

On peut retrouver les traces de ces matrices comme suit:

$$k_i = 2, \quad k_i(1) = 2, \quad \chi[R(H_i, 1)] = 4,$$

$$k_i(\bar{4}) = k_i(\bar{4}^3) = k_i(2_c) = k_i(2_a) = k_i(2_b) = 0,$$

$$\chi[R(H_i, \bar{4})] = \chi[R(H_i, \bar{4}^3)] = \chi[R(H_i, 2_c)]$$

$$= \chi[R(H_i, 2_a)] = \chi[R(H_i, 2_b)] = 0,$$

$$k_i(m_{a+b}) = k_i(m_{-a+b}) = 1,$$

$$\chi[R(H_i, m_{a+b})] = \chi[R(H_i, m_{-a+b})] = 2.$$

Tableau 7. *Familles de points équivalents du groupe ponctuel* 4/m

Les notations sont directement dérivées de celle du groupe d'espace $P4/m - N^\circ 83$ (*International Tables for Crystallography*, 1987): les coordonnées sont relatives au repère conventionnel quadratique.

8	l	1	$x, y, z; \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}; \bar{y}, x, z; y, \bar{x}, z;$ $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}; x, y, \bar{z}; y, \bar{x}, \bar{z}; \bar{y}, x, \bar{z}.$
4	j	$m \dots$	$x, y, 0; \bar{x}, \bar{y}, 0; \bar{y}, x, 0; y, \bar{x}, 0.$
2	g	$4 \dots$	$0, 0, z; 0, 0, \bar{z}.$
1	a	$4/m \dots$	$0, 0, 0.$

Tableau 8. *Caractères des représentations irréductibles du groupe ponctuel* 4/m

R_α	1	4	2	4^3	$\bar{1}$	$\bar{4}$	m	$\bar{4}^3$
A_g	1	1	1	1	1	1	1	1
B_g	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
E_g	$\begin{cases} 1 \\ 1 \end{cases}$	$\begin{cases} i \\ -i \end{cases}$	$\begin{cases} -1 \\ -1 \end{cases}$	$\begin{cases} -i \\ i \end{cases}$	$\begin{cases} 1 \\ 1 \end{cases}$	$\begin{cases} -i \\ -i \end{cases}$	$\begin{cases} -1 \\ -1 \end{cases}$	$\begin{cases} -i \\ i \end{cases}$
A_u	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
B_u	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
E_u	$\begin{cases} 1 \\ 1 \end{cases}$	$\begin{cases} i \\ -i \end{cases}$	$\begin{cases} -1 \\ -1 \end{cases}$	$\begin{cases} -i \\ i \end{cases}$	$\begin{cases} -1 \\ -1 \end{cases}$	$\begin{cases} -i \\ -i \end{cases}$	$\begin{cases} 1 \\ 1 \end{cases}$	$\begin{cases} i \\ -i \end{cases}$

Voici la réduction de $R(m_{a+b})$:

$$m_i(A_1) = (1+1)/2 = 1,$$

$$m_i(A_2) = (1-1)/2 = 0,$$

$$m_i(B_1) = (1-1)/2 = 0,$$

$$m_i(B_2) = (1+1)/2 = 1,$$

$$m_i(E) = (2+0)/2 = 1,$$

$$R(m_{a+b}) = R(n) = A_1 + B_2 + E;$$

$R(m_{a+b})$ est fidèle, $N_i = 1$.

On peut de la même façon étudier les autres RIP de $\bar{4}2m$; leurs caractéristiques sont données dans le Tableau 3. Et de même pour les RIP des groupes ponctuels 23 (Tableaux 4 à 6) et $4/m$ (Tableaux 7 à 9).

Une remarque s'impose; H_j étant un sous-groupe quelconque de G , il n'existe pas forcément un point (au moins) dont H_j serait le stabilisateur; en effet si un point q bien donné est laissé invariant par H_j , H_j

Tableau 9. Caractères, réductions et noyaux des RIP $R(H_i)$ de $G = 4/m$

Familles de points équivalents sous-tendant ces RIP. 1 est le sous-groupe commutateur.

(q_{ij})	$R(H_i)$	1	4	2	4^3	$\bar{1}$	$\bar{4}$	m	$\bar{4}^3$	N_i
a	$R(4/m) = A_g$	1	1	1	1	1	1	1	1	$4/m$
	$R(2/m) = A_g + B_g$	2	0	2	0	2	0	2	0	$2/m$
g	$R(4) = A_g + A_u$	2	2	2	2	0	0	0	0	4
	$R(\bar{4}) = A_g + B_u$	2	0	2	0	0	2	0	2	$\bar{4}$
	$R(\bar{1}) = A_g + B_g + E_g$	4	0	0	0	4	0	0	0	$\bar{1}$
	$R(2) = A_g + B_g + A_u + B_u$	4	0	4	0	0	0	0	0	2
j	$R(m) = A_g + B_g + E_u$	4	0	0	0	0	0	4	0	m
l	$R(1) = A_g + B_g + E_g + A_u + B_u + E_u$	8	0	0	0	0	0	0	0	1

ne contient pas forcément tous les éléments de G transformant q en lui-même.*

Exemple

Les sous-groupes 222 , $\bar{4}$ et 2_c de $\bar{4}2m$ ne sont les stabilisateurs d'aucun point de l'espace cristallographique (Tableau 3). Le sous-groupe 222 de 23 n'est le stabilisateur d'aucun point (Tableau 6). De même les sous-groupes $2/m$, $\bar{4}$, $\bar{1}$ et 2 du groupe $4/m$ (Tableau 9).

Une famille générale de points équivalents sous-tend la RIP $R(1)$; cette représentation est fidèle dans tous les cas. Les familles spéciales sous-tendent des RIP fidèles ou non selon que le noyau se réduit ou non à l'identité (Tableaux 3 et 6). Lorsque G est abélien, seule la représentation sous-tendue par une famille générale, $R(1)$, est fidèle (Tableau 9). La (les) famille(s) spéciale(s) réduite(s) à un point, invariant par G , sous-tend(ent) la RIP $R(G)$ qui (à l'exception de $G = 1$) est toujours non fidèle.

III. Equivalence et emboîtement des RIP

Les RIP associées à des sous-groupes $H_k, H_{k2}, H_{k3}, \dots$ conjugués dans G sont équivalentes; on note alors: $R(H_k) = R(H_{k2}) = R(H_{k3}) = \dots$. Il en résulte que la représentation de permutation d'une famille de points équivalents est bien évidemment indépendante (à un changement de base près) du point générateur de la famille (cf. Tableaux 3, 6 et 9). Si le sous-groupe H_k contient le sous-groupe H_l - ce qui est noté $H_k \supset H_l$ - alors la RIP $R(H_k)$ est dite incluse dans la RIP $R(H_l)$, c'est-à-dire, est équivalente à une représentation de G contenue dans $R(H_l)$ - ce qui est noté $R(H_k) \subset R(H_l)$ (Figs. 1 à 3).† Remarquons que la propriété réciproque n'est pas forcément vérifiée: ainsi la RIP associée à l'un des sous-groupes 3 de 23 pour réduction $A + T$, la RIP associée à l'un

des sous-groupes 2 de 23 a pour réduction $A + E + T$, mais aucun sous-groupe 3 ne contient un des sous-groupes 2 de 23 (Fig. 2). Mais si G est abélien, alors

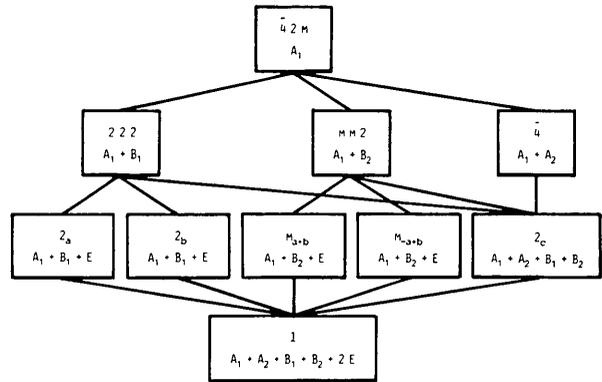


Fig. 1. Treillis des sous-groupes du groupe ponctuel $\bar{4}2m$ et RIP afférentes à ces sous-groupes.

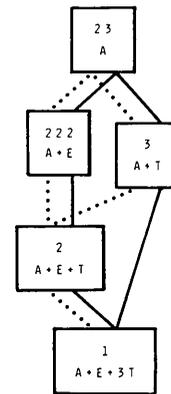


Fig. 2. Ensemble ordonné des classes de conjugaison des sous-groupes du groupe ponctuel 23 (traits pleins); les sous-groupes $23, 222$ et 1 sont invariants et constituent chacun une classe entière; la classe 3 contient les quatre sous-groupes conjugués $3_{a+b+c}, 3_{-a-b+c}, 3_{-a+b-c}$ et 3_{a-b-c} ; la classe 2 contient les trois sous-groupes $2_a, 2_b$ et 2_c . Ensemble ordonné des RIP non équivalentes du groupe 23 (traits discontinus); la représentation induite par le sous-groupe 1 est la représentation régulière, la représentation E n'y figure qu'une fois bien qu'elle soit de dimension 2 ; E est en fait la somme de deux représentations irréductibles complexes conjuguées de dimension 1 (voir Tableau 5). Il existe donc une bijection entre les deux ensembles ordonnés; elle est isotone (Dubreil, 1963) de l'ensemble des classes de sous-groupes vers l'ensemble des classes de RIP et non isotone en sens opposé.

* On peut construire d'autres orbites (vecteurs axiaux, tenseurs, ...) sur lequel le groupe G opère; le sous-groupe H_j peut être le groupe stabilisateur d'un élément d'une de ces orbites éventuellement.

† En d'autres termes, il existe une application isotone (Dubreil, 1963) de l'ensemble des sous-groupes de G ordonné par la relation \supset sur l'ensemble des RIP de G ordonné par la relation \subset : $H_k \supset H_l \Rightarrow R(H_k) \subset R(H_l)$.

$H_k \supset H_l$ et $R(H_k) \subset R(H_l)$ s'impliquent réciproquement: l'ensemble ordonné \mathcal{G} des sous-groupes de G et l'ensemble ordonné \mathcal{R} des RIP non équivalentes de G sont alors isomorphes.

G étant quelconque, considérons deux sous-groupes H_k et H_l tels que $G \supset H_k \supset H_l \supset 1$. Cette condition implique $R(G) \subset R(H_k) \subset R(H_l) \subset R(1)$: $R(G)$ est la représentation identité de G , $R(1)$ est la représentation régulière de G . Puisque la représentation identité $R(G)$ est incluse dans toute RIP $R(H_i)$ et que celle-ci est incluse dans la représentation régulière $R(1)$, toute RIP inclut exactement une fois la représentation identité; la seule RIP irréductible est donc $R(G)$; le poids de toute représentation irréductible R_α de G dans $R(H_i)$ est au plus égal à la dimension d_α de R_α ; on a plus généralement la relation suivante entre les poids de R_α dans $R(H_k)$ et $R(H_l)$ ($H_k \supset H_l$):

$$0 \leq m_k(R_\alpha) \leq m_l(R_\alpha) \leq d_\alpha \Leftrightarrow$$

$$0 \leq (1/|H_k|) \sum_{h_k \in H_k} \chi(R_\alpha, h_k)$$

$$\leq (1/|H_l|) \sum_{h_l \in H_l} \chi(R_\alpha, h_l) \leq d_\alpha$$

pour toutes les représentations irréductibles de G . Notons que la RIP relative au sous-groupe commutateur de G contient chaque représentation irréductible unidimensionnelle de G une fois à l'exclusion de toute autre représentation; le sous-groupe commutateur constitue dans tous les cas le noyau de la RIP qui lui est associée.

Exemple

Les Figs. 1 à 3 et les Tableaux 3, 6, 9 illustrent directement ces propriétés pour les groupes ponctuels $42m$, 23 et $4/m$.

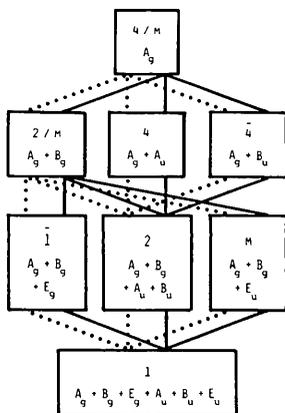


Fig. 3. Sous-groupes du groupe ponctuel $4/m$ et RIP afférentes à ces sous-groupes; E_e et E_u ne figurent qu'une fois dans la représentation régulière car ces représentations sont réductibles (voir Tableau 8). L'ensemble ordonné des sous-groupes (traits pleins) est isomorphe de l'ensemble ordonné des RIP (traits discontinus): ce sont des treillis modulaires.

IV. RIP et lois de treillis

L'ensemble \mathcal{G} des sous-groupes d'une groupe G est un ensemble ordonné par la relation \supset qui, rappelons-le, possède une structure algébrique de treillis: H_1 et H_2 étant deux sous-groupes quelconques de G , on peut définir deux sous-groupes H_3 et H_4 de G (distincts ou éventuellement confondus avec H_1 et H_2) de la manière qui suit.

(i) $H_3 = H_1 \sqcap H_2$ est appelé le plus grand minorant (PGM) de H_1 et H_2 : c'est le plus grand sous-groupe de G contenu à la fois dans H_1 et H_2 ; autrement dit, c'est l'intersection des sous-ensembles H_1 et H_2 de l'ensemble G .

(ii) $H_4 = H_1 \sqcup H_2$ est appelé le plus petit majorant (PPM) de H_1 et H_2 : c'est le plus petit sous-groupe de G contenant à la fois H_1 et H_2 ; dans la majeure partie des situations ce n'est pas la réunion de H_1 et H_2 ; c'est toujours le sous-groupe engendré par leur réunion.

Les lois \sqcap et \sqcup sont associatives, commutatives, idempotentes ($H_1 \sqcap H_1 = H_1 \sqcup H_1 = H_1$) et respectent la double absorption [$H_1 \sqcap (H_1 \sqcup H_2) = H_1 \sqcup (H_1 \sqcap H_2) = H_1$]; G est neutre pour \sqcap , 1 est neutre pour \sqcup . Nous allons maintenant relier les propriétés des RIP aux lois de treillis.

1. Produit direct de RIP

Considérons deux sous-groupes quelconques H_i et H_j de G et la partition de G en complexes doubles associée à ces sous-groupes:

$$G = H_i X_1 H_j + H_i X_2 H_j + \dots + H_i X_r H_j,$$

avec $X_1 \in H_i H_j$, $X_2 \notin H_i X_1 H_j$, $X_3 \notin H_i X_1 H_j$, $X_3 \notin H_i X_2 H_j$ etc. Remarquons que tout élément de G figure *nécessairement* dans un *seul* complexe double de cette partition; il peut apparaître plusieurs fois lors de la construction de ce complexe. Formons maintenant les sous-groupes conjugués de H_j par les r représentants X_β des r complexes doubles:

$$H_j^1 = X_1 H_j X_1^{-1}, \quad H_j^2 = X_2 H_j X_2^{-1}, \dots, \\ H_j^r = X_r H_j X_r^{-1}.$$

Voici les r PGM de H_i et de ces sous-groupes:

$$H_i \sqcap H_j^1, H_i \sqcap H_j^2, \dots, H_i \sqcap H_j^r.$$

Remarquons au passage que, dans cette liste, le même sous-groupe peut apparaître plusieurs fois. Alors le produit direct des RIP $R(H_i)$ et $R(H_j)$ peut être décomposé en la somme des r RIP afférentes aux r sous-groupes $H_i \sqcap H_j^\beta$:

$$R(H_i) \otimes R(H_j) = \sum_{\beta=1}^r R(H_i \sqcap H_j^\beta).$$

Exemple

$G = \bar{4}2m$, $H_i = 2_a$, $H_j = m_{a+b}$. La partition de G comporte deux complexes doubles:

$$\begin{aligned} X_1 = 1, \quad H_i X_1 H_j &= \{1, 2_a\} \{1, m_{a+b}\} \\ &= \{1, m_{a+b}, 2_a, \bar{4}^3\}, \\ X_2 = \bar{4}, \quad H_i X_2 H_j &= \{1, 2_a\} \bar{4} \{1, m_{a+b}\} \\ &= \{1, 2_a\} \{\bar{4}, 2_b\} \\ &= \{\bar{4}, 2_b, m_{-a+b}, 2_c\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_j^1 &= X_1 H_j X_1^{-1} = \{1, m_{a+b}\}, \\ H_j^2 &= X_2 H_j X_2^{-1} = 4 \{1, m_{a+b}\} \bar{4}^3 = \{1, m_{-a+b}\}; \end{aligned}$$

$$H_i \sqcap H_j^1 = \{1, 2_a\} \sqcap \{1, m_{a+b}\} = 1,$$

$$H_i \sqcap H_j^2 = \{1, 2_a\} \sqcap \{1, m_{-a+b}\} = 1;$$

$$R(2_a) \otimes R(m_{a+b}) = 2R(1).$$

Par un simple calcul de caractères, on peut vérifier à partir des Tableaux 2 et 3 qu'on a effectivement:

$$\begin{aligned} (A_1 + B_1 + E) \otimes (A_1 + B_2 + E) \\ = 2(A_1 + A_2 + B_1 + B_2 + 2E). \end{aligned}$$

Exemple

$G = \bar{4}2m$, $H_i = H_j = 2_a$. La partition de G comporte trois complexes doubles:

$$\begin{aligned} X_1 = 1, \quad H_i X_1 H_j &= \{1, 2_a\} \{1, 2_a\} \\ &= \{1, 2_a, 2_a, 1\}, \\ X_2 = \bar{4}, \quad H_i X_2 H_j &= \{1, 2_a\} \bar{4} \{1, 2_a\} \\ &= \{1, 2_a\} \{\bar{4}, m_{a+b}\} \\ &= \{\bar{4}, m_{a+b}, m_{-a+b}, \bar{4}^3\}, \\ X_3 = 2_c, \quad H_i X_3 H_j &= \{1, 2_a\} 2_c \{1, 2_a\} \\ &= \{1, 2_a\} \{2_c, 2_b\}, \\ &= \{2_c, 2_b, 2_b, 2_c\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_j^1 &= X_1 H_j X_1^{-1} = \{1, 2_a\}, \\ H_j^2 &= X_2 H_j X_2^{-1} = \bar{4} \{1, 2_a\} \bar{4}^3 = \{1, 2_b\}, \\ H_j^3 &= X_3 H_j X_3^{-1} = 2_c \{1, 2_a\} 2_c = \{1, 2_a\}; \end{aligned}$$

$$H_i \sqcap H_j^1 = 2_a, \quad H_i \sqcap H_j^2 = 1, \quad H_i \sqcap H_j^3 = 2_a;$$

$$R(2_a) \otimes R(2_a) = 2R(2_a) + R(1).$$

Un simple calcul de caractères montre qu'on a en effet:

$$\begin{aligned} (A_1 + B_1 + E) \otimes (A_1 + B_1 + E) \\ = 2(A_1 + B_1 + E) + (A_1 + A_2 + B_1 + B_2 + 2E). \end{aligned}$$

Puisque l'on peut toujours prendre $X_1 = 1$, alors $R(H_i) \otimes R(H_j)$ contient $R(H_i \sqcap H_j)$ au moins une fois; il n'est donc pas toujours indispensable de

réaliser la partition de G en complexes doubles pour décomposer $R(H_i) \otimes R(H_j)$; en particulier si la dimension $p_{i \sqcap j}$ de $R(H_i \sqcap H_j)$ est égale à $p_i p_j$, alors $R(H_i) \otimes R(H_j) = R(H_i \sqcap H_j)$.

Exemple

$$\begin{aligned} G = \bar{4}2m, \quad H_i = 222, \quad H_j = mm2, \quad H_i \sqcap H_j = 2_c, \\ p_i = p_j = 2, \quad p_{i \sqcap j} = 4 = p_i p_j, \\ R(222) \otimes R(mm2) = R(2_c). \end{aligned}$$

Par un simple calcul de caractères, on vérifie qu'on a:

$$(A_1 + B_1) \otimes (A_1 + B_2) = (A_1 + A_2 + B_1 + B_2).$$

Voyons maintenant quelques cas particuliers. Si la partition de G n'admet qu'un seul complexe double, c'est-à-dire, si $H_i H_j = G$, alors $R(H_i) \otimes R(H_j) = R(H_i \sqcap H_j)$.

Exemple

$$\begin{aligned} G = \bar{4}2m, \quad H_i = \bar{4}, \quad H_j = 222, \\ H_i H_j = \{1, \bar{4}, 2_c, \bar{4}^3\} \{1, 2_a, 2_b, 2_c\} \\ = \{1, 2_a, 2_b, 2_c, \bar{4}, m_{a+b}, m_{-a+b}, \\ \bar{4}^3, 2_c, 2_b, 2_a, 1, \bar{4}^3, m_{-a+b}, m_{a+b}, \bar{4}\} = \bar{4}2m, \\ H_i \sqcap H_j = 2_c, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(\bar{4}) \otimes R(222) &= (A_1 + A_2) \otimes (A_1 + B_1) \\ &= A_1 + A_2 + B_1 + B_2 = R(2_c). \end{aligned}$$

Si l'un au moins des sous-groupes H_i ou H_j est invariant, alors:

$$R(H_i) \otimes R(H_j) = (p_i p_j / p_{i \sqcap j}) R(H_i \sqcap H_j).$$

Exemple

$$\begin{aligned} G = \bar{4}2m, \quad H_i = m_{a+b}, \quad H_j = mm2, \\ H_i \sqcap H_j = m_{a+b}, \quad p_i = p_{i \sqcap j} = 4, \\ p_j = 2, \quad p_i p_j / p_{i \sqcap j} = 2, \\ R(m_{a+b}) \otimes R(mm2) &= (A_1 + B_2 + E) \otimes (A_1 + B_2) \\ &= 2(A_1 + B_2 + E) \\ &= 2R(m_{a+b}) \\ &= 2R(m_{a+b} \sqcap mm2). \end{aligned}$$

Quel que soit H_i , alors $R(H_i) \otimes R(G) = R(H_i)$.

Exemple

$$\begin{aligned} G = 23, \quad H_i = 2_a \quad (\text{voir Tableaux 5 et 6}), \\ R(2_a) \otimes R(23) &= (A + E + T) \otimes A \\ &= A + E + T = R(2_a). \end{aligned}$$

Quel que soit H_i , alors $R(H_i) \otimes R(1) = p_i R(1)$.

Exemple

$$G = \bar{4}2m, \quad H_i = 2_a, \quad p_i = 4,$$

$$R(2_a) \otimes R(1) = (A_1 + B_1 + E)$$

$$\otimes (A_1 + A_2 + B_1 + B_2 + 2E)$$

$$= 4(A_1 + A_2 + B_1 + B_2 + 2E) = 4R(1).$$

Quel que soit H_i , $R(H_i) \otimes R(H_i)$ contient $R(H_i)$ au moins une fois et si H_i est invariant, alors:

$$R(H_i) \otimes R(H_i) = p_i R(H_i).$$

Exemple

$$G = 23, \quad H_i = 222, \quad p_i = 3,$$

$$R(222) \otimes R(222) = (A + E) \otimes (A + E)$$

$$= 3(A + E) = 3R(222).$$

Quel que soit G , $R(G) \otimes R(G) = R(G)$ et $R(1) \otimes R(1) = |G|R(1)$. Si G est abélien, alors dans tous les cas on a:

$$R(H_i) \otimes R(H_j) = (p_i p_j / p_{i \cap j}) R(H_i \sqcap H_j).$$

Exemple

$$G = 4/m, \quad H_i = 2/m, \quad H_j = \bar{4}, \quad H_i \sqcap H_j = 2,$$

$$p_i = p_j = 2, \quad p_{i \cap j} = 4, \quad p_i p_j / p_{i \cap j} = 1,$$

$$R(2/m) \otimes R(\bar{4}) = (A_g + B_g) \otimes (A_g + B_u)$$

$$= (A_g + B_g + A_u + B_u)$$

$$= R(2) \text{ (cf. Tableaux 7 et 8).}$$

2. Intersection de RIP

Une représentation R de G est dite l'intersection des RIP $R(H_i)$ et $R(H_j)$ si $R \subset R(H_i)$, si $R \subset R(H_j)$ et si R est de dimension *maximum* parmi toutes les représentations de G incluses dans $R(H_i)$ et $R(H_j)$; on note alors $R = R(H_i) \cap R(H_j)$. Remarquons que R n'est pas forcément une RIP; on a d'une façon générale $R(H_i \sqcup H_j) \subset R(H_i) \cap R(H_j)$.

Exemple

$$G = \bar{4}2m, \quad H_i = 2_a, \quad H_j = m_{a+b}.$$

$$H_i \sqcup H_j = \bar{4}2m, \quad R(2_a) = A_1 + B_1 + E,$$

$$R(m_{a+b}) = A_1 + B_2 + E, \quad R(\bar{4}2m) = A_1,$$

$$A_1 \subset A_1 + E = (A_1 + B_1 + E) \cap (A_1 + B_2 + E) \neq \text{RIP}.$$

H'_i et H'_j étant respectivement des sous-groupes conjugués quelconques de H_i et H_j dans G , on a:

$$R(H'_i) \cap R(H'_j) = R(H_i) \cap R(H_j).$$

Désignons alors par H_j^* un sous-groupe conjugué de H_j ayant la propriété d'avoir le maximum d'éléments en commun avec H_i . On peut alors construire une

base pour $R^* = R(H_i) \cap R(H_j^*)$ de la manière qui suit. Considérons le recouvrement de G en p_i pseudo-complexes[†] $L_k = A_{ik} H_i H_j^*$ où l'ensemble des complexes $A_{ik} H_i$ est la partition P_i de G (voir § II). Remarquons les propriétés caractéristiques de ce recouvrement de G : $L_1 = H_i H_j^*$ n'est pas forcément un sous-groupe de G , tout élément de G figure dans au moins un pseudo-complexe, un élément quelconque de G peut apparaître plusieurs fois (multiplicité) dans la construction d'un pseudo-complexe donné, tous les éléments d'un pseudo-complexe y apparaissent avec la même multiplicité, un élément de G peut figurer dans *plusieurs* pseudo-complexes différents, tous les pseudo-complexes contiennent le même nombre $|H_i| |H_j^*|$ d'éléments en tenant compte de leur multiplicité. Nous allons conserver parmi les pseudo-complexes ceux qui constituent avec L_1 un ensemble L de vecteurs linéairement indépendants au sens de l'espace vectoriel construit sur les éléments de G . L'ensemble L est la base recherchée pour $R(H_i) \cap R(H_j^*) = R^*$.

Exemple

$$G = \bar{4}2m, \quad H_i = 2_a, \quad H_j = m_{a+b} = H_j^*,$$

$$A_{i1} = 1, \quad A_{i1} H_i = \{1, 2_a\},$$

$$L_1 = 2_a \cdot m_{a+b} = \{1, m_{a+b}, 2_a, \bar{4}^3\},$$

$$A_{i2} = \bar{4}, \quad A_{i2} H_i = \{\bar{4}, m_{a+b}\},$$

$$L_2 = \bar{4} L_1 = \{\bar{4}, 2_b, m_{a+b}, 1\},$$

$$A_{i3} = 2_c, \quad A_{i3} H_i = \{2_c, 2_b\},$$

$$L_3 = 2_c L_1 = \{2_c, m_{-a+b}, 2_b, \bar{4}\},$$

$$A_{i4} = \bar{4}^3, \quad A_{i4} H_i = \{\bar{4}^3, m_{-a+b}\},$$

$$L_4 = \bar{4}^3 L_1 = \{\bar{4}^3, 2_a, m_{-a+b}, 2_c\}$$

$$= L_1 - L_2 + L_3.$$

$L = \{L_1, L_2, L_3\}$ est une base pour $R(2_a) \cap R(m_{a+b}) = A_1 + E$; plus précisément $\{L_1 + L_3\}$ est une base pour la composante A_1 , $\{L_1 - L_3, L_2 - L_3\}$ est une base pour la composante E .

Lorsque $L_1 = H_i H_j^*$ est un sous-groupe de G (éventuellement répété plusieurs fois), alors $R(H_i) \cap R(H_j^*)$ est une RIP: $R(H_i) \cap R(H_j^*) = R(H_i \sqcup H_j^*)$. L_1 est un sous-groupe, en particulier, si au moins l'un des sous-groupes H_i ou H_j^* est invariant vis-à-vis de

[†] Les notions de complexe simple associé à un sous-groupe et de complexe double associé à deux sous-groupes sont classiques en *Théorie des Groupes* (Gorenstein, 1968). Nous avons appelé pseudo-complexe associé aux sous-groupes H_i, H_j^* la quantité $L_k = A_{ik} H_i H_j^*$ car elle paraît ressembler à un complexe simple ou double sans en posséder une des caractéristiques fondamentales: tout élément du groupe apparaît dans une *seul* complexe d'une partition en complexes simples ou doubles. Les recouvrements d'un groupe en pseudo-complexes ne semblent pas avoir fait l'objet de travaux approfondis.

l'autre, c'est-à-dire, si on a $h_j^* H_i = H_i h_j^*$, $\forall h_j^* \in H_j^*$, ou si on a $h_i H_j^* = H_j^* h_i$, $\forall h_i \in H_i$; c'est bien entendu le cas si au moins l'un des sous-groupes H_i ou H_j est invariant dans G .

Exemple

$$G = \bar{4}2m, \quad H_i = 2_a, \quad H_j = 2_c \quad (\text{invariant dans } G),$$

$$A_{i1} = 1, \quad L_1 = 2_a \cdot 2_c = \{1, 2_c, 2_a, 2_b\}$$

$$= 222 = 2_a \sqcup 2_c,$$

$$A_{i2} = \bar{4}, \quad L_2 = \bar{4}L_1 = \{\bar{4}, \bar{4}^3, m_{a+b}, m_{-a+b}\},$$

$$A_{i3} = 2_c, \quad L_3 = 2_c L_1$$

$$= \{2_c, 1, 2_b, 2_a\} = L_1,$$

$$A_{i4} = \bar{4}^3, \quad L_4 = \bar{4}^3 L_1$$

$$= \{\bar{4}^3, \bar{4}, m_{-a+b}, m_{a+b}\} = L_2,$$

$L = \{L_1, L_2\}$ est une base pour $R(2_a) \cap R(2_c) = A_1 + B_1 = R(222)$; plus précisément $\{L_1 + L_2\}$ est une base pour la composante A_1 , $\{L_1 - L_2\}$ est une base pour la composante B_1 .

3. Treillis des RIP d'un groupe abélien

Lorsque G est abélien, tous ses sous-groupes sont invariants et on a $R(H_i) \cap R(H_j) = R(H_i \sqcup H_j)$, quels que soient H_i et H_j . C'est le cas du groupe $4/m$ (Fig. 3). Comme l'ensemble ordonné \mathcal{R} des RIP non équivalentes de G est alors isomorphe de l'ensemble ordonné \mathcal{G} des sous-groupes de G et que \mathcal{G} est un treillis, il en résulte que \mathcal{R} peut être érigé en treillis. Il reste à préciser le PGM et le PPM de deux RIP, notés ici \wedge et \vee :

$$R(H_i) \wedge R(H_j) = R(H_i) \cap R(H_j)$$

$$= R(H_i \sqcup H_j),$$

$$R(H_i) \vee R(H_j) = (p_{i \sqcup j} / p_i p_j) R(H_i) \otimes R(H_j)$$

$$= R(H_i \sqcap H_j).$$

On déduit alors de l'absorption $R(H_i) \vee [R(H_i) \wedge R(H_j)] = R(H_i)$ la relation $R(H_i) \otimes R(H_i \sqcup H_j) = p_{i \sqcup j} R(H_i)$ où $p_{i \sqcup j}$ est l'indice de $H_i \sqcup H_j$ dans G .

Exemple

$$G = 4/m, \quad H_i = \bar{1}, \quad H_j = m,$$

$$H_i \sqcup H_j = 2/m, \quad p_{i \sqcup j} = 2,$$

$$R(\bar{1}) \otimes R(2/m) = (A_g + B_g + E_g) \otimes (A_g + B_g)$$

$$= 2(A_g + B_g + E_g)$$

comme on peut le vérifier sans difficulté à partir des caractères de $4/m$ (cf. Tableaux 8 et 9).

Puisque G est abélien, les deux treillis \mathcal{G} et \mathcal{R} sont modulaires; ce qui veut dire que $H_i \supset H_j$ entraîne

$$H_i \sqcap (H_k \sqcup H_j) = (H_i \sqcap H_k) \sqcup H_j,$$

$$R(H_i) \subset R(H_j)$$

$$R(H_i) \vee [R(H_k) \wedge R(H_j)]$$

$$= [R(H_i) \vee R(H_k)] \wedge R(H_j),$$

quel que soit H_k . Il en résulte que $H_i \supset H_j$ entraîne:

$$\frac{|H_i| |H_k \sqcup H_j|}{|G| |H_i \sqcap (H_k \sqcup H_j)|} R(H_i) \otimes [R(H_k) \cap R(H_j)]$$

$$= [R(H_i) \otimes R(H_k)] \cap R(H_j).$$

Exemple

$$G = 4/m, \quad H_i = 4, \quad H_j = 2, \quad H_i \subset H_j,$$

$$H_k = m, \quad H_k \sqcup H_j = 2/m, \quad H_i \sqcap (H_k \sqcup H_j) = 2,$$

$$R(H_i) = A_g + A_u, \quad R(H_j) = A_g + B_g + A_u + B_u,$$

$$R(H_k) = A_g + B_g + E_u, \quad R(H_k) \cap R(H_j) = A_g + B_g.$$

On calcule d'une part:

$$\frac{4 \times 4}{8 \times 2} (A_g + A_u) \otimes (A_g + B_g) = A_g + B_g + A_u + B_u$$

et d'autre part:

$$[(A_g + A_u) \otimes (A_g + B_g + E_u)]$$

$$\cap (A_g + B_g + A_u + B_u)$$

$$= (A_g + B_g + E_u + A_u + B_u + E_g)$$

$$\cap (A_g + B_g + A_u + B_u)$$

$$= A_g + B_g + A_u + B_u.$$

Ces propriétés toujours vraies pour un groupe abélien et ses sous-groupes sont encore vraies pour un groupe non abélien à condition de ne prendre en

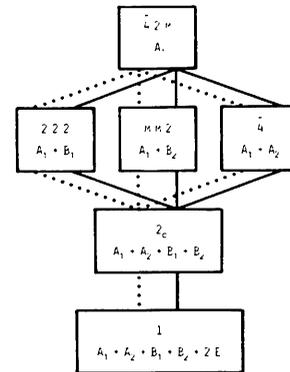


Fig. 4. Treillis modulaire des sous-groupes invariants du groupe $G = \bar{4}2m$.

considération que ses seuls sous-groupes invariants et les RIP qui leur sont associées.

Exemple

La Fig. 4 donne le treillis modulaire des sous-groupes invariants du groupe $G = \bar{4}2m$; il est isomorphe du treillis modulaire des RIP associées à ces sous-groupes invariants.

V. Remarques finales

Les propriétés des RIP ont été illustrées dans le présent mémoire sur les exemples des groupes ponctuels $\bar{4}2m$, 23 et $4/m$ qui sont de complexité moyenne. Nous tenons à la disposition du lecteur des tables concernant les 32 groupes ponctuels cristallographiques, les 58 groupes ponctuels bicolores vrais (cristallographiques), les 32 groupes ponctuels bicolores gris (cristallographiques) (Belguith & Billiet, 1989) et des groupes ponctuels non cristallographiques (Masmoudi & Billiet, 1988).

Un domaine d'application des RIP est l'étude des représentations sous-tendues par les vecteurs de liaison des molécules à atome central. C'est le cas, par exemple, de la molécule PCl_5 bipyramidale à base triangulaire dans l'état vapeur qui est caractérisée par le groupe ponctuel $\bar{6}m2$. En voici les positions [notations dérivées directement de celles du groupe d'espace $P\bar{6}m2$ - N° 187 (*International Tables for Crystallography*, 1987)]:

Cl 3 j $mm2$ $x, \bar{x}, 0; x, 2x, 0; 2\bar{x}, \bar{x}, 0.$

Cl 2 g $3m.$ $0, 0, z; 0, 0, \bar{z};$

P 1 a $\bar{6}m2$ $0, 0, 0.$

Les cinq liaisons P-Cl sous-tendent la représentation de permutation $\Gamma = 2A'_1 + A'_2 + E'$ du groupe $\bar{6}m2$. Γ

est la somme de deux RIP de ce groupe: $R(3m) = A'_1 + A'_2$ sous-tendue par les deux liaisons axiales [$2,11 \text{ \AA}$; cf. Durrant & Durrant (1972)] et $R(mm2) = A'_1 + E'$ sous-tendue par les trois liaisons équatoriales [$2,04 \text{ \AA}$; cf. Durrant & Durrant (1972)].

Les RIP d'un groupe sont un cas particulier d'une catégorie plus vaste de représentations induites dites 'monomiales', c'est-à-dire, induites par les représentations monodimensionnelles des sous-groupes (Gorenstein, 1968). Des représentations monomiales plus complexes que les RIP apparaissent lorsqu'on étudie par exemple les représentations sous-tendues par des vecteurs équivalents joignant des positions prises dans deux familles de positions équivalentes d'un groupe ponctuel (molécule à liaisons non centrales) (Masmoudi & Billiet, 1989).

Références

- BELGUTH, J. & BILLIET, Y. (1988). *Acta Cryst.* **A44**, 124-127.
 BERGER, M. (1977). *Géométrie*. Tome 1. *Action de Groupes, Espaces Affines et Projectifs*. Paris: Cedic/Nathan.
 BERTAUT, E. F. (1968). *Acta Cryst.* **A24**, 217-231.
 BERTAUT, E. F. (1981). *C. R. Acad. Sci.* **293**, 253-256.
 DUBREIL, P. (1963). *Algèbre*. Paris: Gauthier-Villars.
 DUBREIL, P. (1972). *Théorie des Groupes*. Paris: Dunod.
 DURRANT, P. J. & DURRANT, B. (1972). *Introduction to Advanced Inorganic Chemistry*. Londres: Longman.
 GORENSTEIN, D. (1968). *Finite Groups*. New York: Harper & Row.
International Tables for Crystallography (1987). Tome A. Dordrecht: Reidel. (Distributeur actuel Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.)
 KIRILLOV, A. A. (1976). *Elements of the Theory of Representations*. Berlin: Springer-Verlag.
 KUROSH, A. G. (1960). *The Theory of Groups*, Tome 2. New York: Chelsea Publishing Company.
 KUROSH, A. G. (1965). *Lectures in General Algebra*. Oxford: Pergamon.
 LOMONT, J. S. (1959). *Applications of Finite Groups*. New York: Academic Press.
 MASMOUDI, K. & BILLIET, Y. (1989). À paraître.
 MURNAGHAM, F. D. (1963). *The Theory of Group Representations*. New York: Dover.

Acta Cryst. (1989). **A45**, 34-39

Bounding a Molecule in a Noisy Synthesis

BY A. G. URZHUMTSEV, V. YU LUNIN AND T. B. LUZYANINA

Research Computer Centre, Academy of Sciences of the USSR, Pushchino, Moscow Region, 142292, USSR

(Received 2 February 1988; accepted 14 July 1988)

Abstract

A method of bounding a protein molecule in a very noisy synthesis is considered. It consists of two steps. In the first step ('nonlinear filtration') basic points

are chosen that are most likely to belong to the region of the molecule. In the second step ('linear filtration') a compact region with the maximal concentration of these points is searched. Various modifications of the method are analysed. It is shown that the molecular